



OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
AN ȘCOLAR 2025 – 2026
ETAPA LOCALĂ
07.02.2026

CLASA a VII – a

BAREM

Subiectul I

a) Demonstrați că numărul $\sqrt{4^n + 9^n}$ este irațional pentru orice număr natural n .

Soluție

Pentru n număr par nenul, $\mathcal{U}(4^n + 9^n) = \mathcal{U}(6 + 1) = 7$, iar pentru n număr impar $\mathcal{U}(4^n + 9^n) = \mathcal{U}(4 + 9) = 3$6p

Numerele naturale care au ultima cifră 3 sau 7 nu sunt pătrate perfecte, deci $\sqrt{4^n + 9^n}$ este irațional pentru orice număr natural nenul.....3p

Pentru $n=0$, numărul $\sqrt{4^0 + 9^0} = \sqrt{2}$ este irațional.....1p

b) Determinați numerele reale nenule a, b, c, d dacă $\frac{abc}{d} = 20, \frac{bcd}{a} = 2, \frac{cda}{b} = 6$ și $\frac{dab}{c} = 15$.

(autor prof. Eleonora Savu)

Soluție

Din $\frac{abc}{d} \cdot \frac{bcd}{a} \cdot \frac{cda}{b} \cdot \frac{dab}{c} = 3600 \Rightarrow (abcd)^2 = 3600 \Leftrightarrow |abcd| = 60$2p

$abcd = 20d^2 \Rightarrow abcd > 0$, deci $abcd = 60$2p

Din $2a^2 = 6b^2 = 15c^2 = 20d^2 = 60 \Rightarrow |a| = \sqrt{30}, |b| = \sqrt{10}, |c| = 2, |d| = \sqrt{3}$2,5p

Produsul $abcd$ fiind pozitiv rezultă că numerele a, b, c, d fie au același semn, fie două dintre ele sunt pozitive și celelalte două sunt negative. Sunt 8 soluții: $(\sqrt{30}, \sqrt{10}, 2, \sqrt{3}), (-\sqrt{30}, -\sqrt{10}, -2, -\sqrt{3}), (\sqrt{30}, \sqrt{10}, -2, -\sqrt{3}), (\sqrt{30}, -\sqrt{10}, 2, -\sqrt{3}), (\sqrt{30}, -\sqrt{10}, -2, \sqrt{3}), (-\sqrt{30}, -\sqrt{10}, 2, \sqrt{3}), (-\sqrt{30}, \sqrt{10}, -2, \sqrt{3}), (-\sqrt{30}, \sqrt{10}, 2, -\sqrt{3})$6p



Subiectul II

Fie mulțimea $A = \{1 + 4\sqrt{2}, 2 + 4\sqrt{2}, 3 + 4\sqrt{2}, \dots, 10 + 4\sqrt{2}\}$. Determinați mulțimile B și C care îndeplinesc simultan proprietățile:

- $B \cup C = A$ și $B \cap C = \emptyset$.
- C are două elemente.
- Raportul dintre media aritmetică a elementelor mulțimii B și produsul elementelor mulțimii C este egal cu $\frac{1}{8}$.

Soluție

Suma elementelor din A este egală cu $10 \cdot 11 : 2 + 10 \cdot 4\sqrt{2} = 55 + 40\sqrt{2}$4p

$C = \{a, b\}$, $B = A \setminus C$; suma elementelor din B este $55 + 40\sqrt{2} - a - b$ și din c) rezultă că

$$ab + a + b = 55 + 40\sqrt{2}$$
.....4p

$a = x + 4\sqrt{2}$, $b = y + 4\sqrt{2}$ și $x, y \in \{1, 2, \dots, 10\}$, $x \neq y$. Din $(x + 4\sqrt{2})(y + 4\sqrt{2}) + x + 4\sqrt{2} + y + 4\sqrt{2} = 55 + 40\sqrt{2}$ rezultă $xy + x + y + 4\sqrt{2}(x + y) = 23 + 32\sqrt{2}$8p

Din x și y numere naturale, iar $\sqrt{2}$ irațional, egalitatea are loc numai dacă $xy + x + y = 23$ și $x + y = 8$, adică $xy = 15$ și $x + y = 8$. Obținem $\{x, y\} = \{3, 5\}$4p

Mulțimile sunt $C = \{3 + 4\sqrt{2}, 5 + 4\sqrt{2}\}$ și $B = A \setminus C$2,5p

Subiectul III

Considerăm paralelogramul $ABCD$, punctul M situat pe latura CD și dreptele AM și BC care se intersectează în punctul N .

a) Arătați că $A_{ADM} + A_{BMC} = \frac{1}{2} \cdot A_{ABCD}$.

b) Demonstrați că triunghiurile DMN și BMC au arii egale.

Soluție

a) $A_{ADM} = \frac{d(A, DC) \cdot DM}{2}$, $A_{BMC} = \frac{d(B, DC) \cdot MC}{2}$ 3p

Cum AB paralelă cu CD , rezultă că $d(A, DC) = d(B, DC)$ 1,5p



$$A_{ADM} + A_{BMC} = \frac{d(A, DC) \cdot (DM + MC)}{2} = \frac{d(A, DC) \cdot DC}{2} = \frac{1}{2} \cdot A_{ABCD} \dots\dots\dots 6p$$

$$b) A_{ADN} = \frac{d(N, AD) \cdot AD}{2} = \frac{1}{2} \cdot A_{ABCD} \dots\dots\dots 6p$$

$$\text{Cum } A_{ADM} + A_{BMC} = A_{ADN} \text{ și } A_{ADN} = A_{ADM} + A_{DMN}, \text{ obținem } A_{DMN} = A_{BMC} \dots\dots\dots 6p$$

Subiectul IV

În triunghiul isocel ABC cu $AB \equiv AC$, punctul D este mijlocul laturii BC și punctul M este mijlocul lui AD. Punctul E este simetricul punctului B față de M.

- Demonstrați că ADCE este dreptunghi.
- Dacă N este piciorul perpendicularei din D pe BE, demonstrați că unghiul $\sphericalangle ANC$ este drept.

Soluție

a) ABDE este paralelogram întrucât diagonalele lui se înjumătățesc. Laturile AE și BD sunt paralele și congruente.....4p

AE și CD sunt paralele și congruente. Rezultă că ADCE este paralelogram.....2p

AD este mediană și înălțime în triunghiul isoscel ABC cu baza BC.....2p

ADCE este un paralelogram cu $\sphericalangle ADC = 90^\circ \Rightarrow$ ADCE dreptunghi.....2p

b) Fie F punctul de intersecție al diagonalelor dreptunghiului ADCE. F este mijlocul diagonalelor și $AC=DE$4p

NF este mediană în triunghiul dreptunghic DNE cu $\sphericalangle DNE = 90^\circ \Rightarrow NF = \frac{DE}{2} = \frac{AC}{2}$4p

NF mediană în triunghiul ANC și $NF = \frac{AC}{2} \Rightarrow \sphericalangle ANC = 90^\circ$ 4,5p